任意の平面図形を包む円について

久野敦司 呉市／学生 20 歳
中村俊彦 19 歳 (1976.12 月受付)

ここで扱う平面図形 (パターン) とは，必ずしも連結でない有界な閉集合を意味する．証明したい定理は:

有界な平面図形 A を包む円のうち，最小半径のものが唯一つ定まる

ということである (図 1.1)

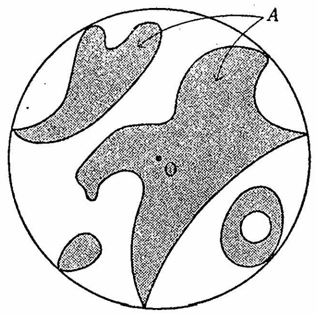

図 1.1

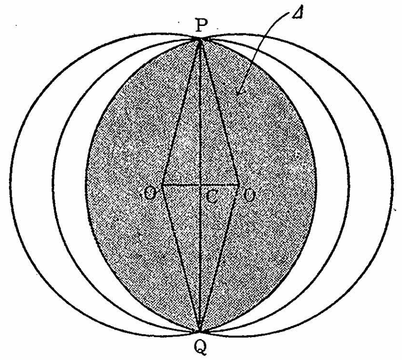

図 1.2

証明 A は有界だから，それを含む十分大きい半径の円がある．そこで A を含む円の半径の下限を r とする．A が 2 点以上を含めば，$r>0$ である．定義により，半径 $r+(1/n)$ の円 O_n で A を含むものがある．中心 O_n は有界な範囲に留るから，$n\to\infty$ とすれば，O_n の適当な部分列が点 O に収束し，円 O_n の部分列が O を中心とする半径 r の円に収束し，円 O は A を含む．この円 O が A を含む最小半径の円である．

もしこのような円が O と O′ と 2 個あるとすれば，A はその共通部分 Δ (図 1.2 の影の部分) に含まれる．Δ は，共通弦 PQ を直径とする円 C に含まれ，円 C の半径は円 O の半径より小さいから (図 1.2)，円 O が最小半径ということに矛盾する．ゆえに最小半径の円は唯一つ定まる．

ノート係注 原稿では，後半について三角法を利用して細かく計算して証明していました．しかし上述の後半の事実は，初等幾何学的に容易に証明できます．

迷路のトポロジーについて

吉池真悟 金沢市／学生 19 歳 (1976.12 月受付)

本誌 ’76-12 月号に「迷路のトポロジー」がでている．図 2.1 で c から出発して c へ戻る場合，部屋から出るたびに 1 を加えると，すなわち最初の c を数え，最後の c を数えないとすると，動きを縦横に分解してみれば，行っただけ戻らなければならないから，通った部屋の数は偶数個である．

$c\to c$ の行程で，とくに i を通る場合には，$i\to c$ の経路で通る部屋の数は (上のように数えて) 偶数である．したがって c から出発して i から出るならば，この意味で通る部屋の数は奇数個となり，12 部屋すべてを 1 回ずつ通ることは不可能である．11 部屋を通るのは，たとえば図 2.2 のように可能である．この場合 (12 月号の本文の定義に従えば) 難度は 12 となる．

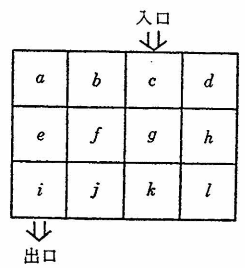

図 2.1

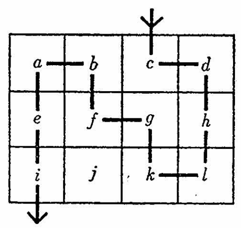

図 2.2

無理数の小数部の一様分布性について

相良雅之 池田市／学生 22 歳 (1977 年 1 月受付)

本誌 ’77-1 月号の本欄で，α を無理数としたとき

$$\{P(n)=n\alpha-[n\alpha]\}_{n=1,2,\cdots}$$

の稠密性を示したが，さらに進んで一様分布性も以下のように初等的に示される．**一様分布性**とは，$[0,1[$ に含まれる任意の半開区間 I に含まれる $\{P(n)|1\leqq n\leqq N\}$ の個数を $T(N)$ とおくとき

(1) $\displaystyle\lim_{N\to\infty} T(N)/N=a \quad (=I \text{ の長さ})$

が成立することである．

稠密性により，$\delta=P(n_0)$ がいくらでも小さい自然数 n_0 がある．n_0, δ を固定し

(2) $P_j(n)=P(nn_0+j), \qquad 1\leqq j\leqq n_0$

とおくと，$P_j(0)$, $P_j(1)$, … は区間 $[0,1[$ の点を円周上においたとき，等間隔 δ でまわる．この列が初めて $P_j(0)$ を越えて第 2 周目に入ったのが $P_j(n')$ とすると，$\{P_j(k)|0\leqq k\leqq n'-1\}$ のうち I に含まれるものの個数 m' は，

(3) $(m'-1)\delta<a<(m'+1)\delta$

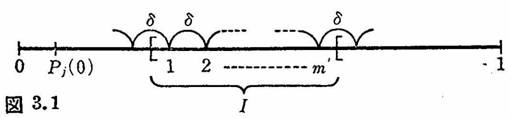

図 3.1

である (図 3.1)．ところで $\{P(i)|0\leqq i\leqq N\}$ のうち $P_j(n)$ の形に書けるものの個数 m は，$n\equiv j \pmod{n_0}$，$0\leqq n\leqq N$ であるものの個数に等しく，$[N/n_0]$ か $[N/n_0]+1$ に等しい．$\{P_j(k)|0\leqq k\leqq m-1\}$ は $P_j(0)$ を出発点として円周を $(m-1)\delta$ だけ回るから，このうち I に含まれるものの個数を $T_j(N)$ とすると，(3) と合わせて，次の不等式をうる．

(4) $\displaystyle\left(\frac{a}{\delta}-1\right)[(m-1)\delta]<T_j(N)$
$\displaystyle<\left(\frac{a}{\delta}+1\right)([(m-1)\delta]+1)$

ところが

$$[(m-1)\delta]\geqq[([N/n_0]-1)\delta]\geqq N\delta/n_0-(2\delta+1)$$
$$[(m-1)\delta]\leqq[[N/n_0]\delta]\leqq N\delta/n_0$$

なので，これらを (4) に代入すると

(5) $\displaystyle\left(\frac{a}{\delta}-1\right)\left(\frac{N\delta}{n_0}-(2\delta+1)\right)<T_j(N)$
$\displaystyle<\left(\frac{a}{\delta}+1\right)\left(\frac{N\delta}{n_0}+1\right)$

をうる．(5) を $j=1,\cdots,n_0$ について加えれば，中央の項は $T(N)$ となる．その n_0 個の和の全体を n_0N で割って整理すると

(6) $\displaystyle(a-\delta)\left(1-\frac{n_0}{N}\left(2+\frac{1}{\delta}\right)\right)<\frac{T(N)}{N}$
$\displaystyle<(a+\delta)\left(1+\frac{n_0}{N\delta}\right)$

をうる．δ, n_0 を固定して $N\to+\infty$ とすれば，(6) から

(7) $\displaystyle a-\delta\leqq\liminf_{N\to\infty} T(N)/N$
$\displaystyle\leqq\limsup_{N\to\infty} T(N)/N\leqq a+\delta$

である．δ は任意に小さくとれるから，この式 (7) は $\displaystyle\lim_{N\to\infty} T(N)/N$ が存在して a に等しいことを意味する．

このページに数学ノートをお送り下さい

数学ノート 応募規定

送先／160 東京都新宿区須賀町 14，日本評論社，数学セミナー，〈NOTE〉係

原稿／よこ書，1 行 25 字詰，65 行を原則とします．
氏名，住所，年齢，職業を記入のこと．

内容／新しい数学のセンスがあるもの

掲載のさいに適当に書き改めることがあります／掲載の分には薄謝を呈します／応募原稿はお返しいたしません．誌上仮名はさしつかえありませんが，封筒にはかならず本名と正確な連絡先をご記入下さい．